МАТЕМАТИКА

Сьогодні ми розберемо решту завдань, що присвячені числам та виразам. А також почнемо розв'язувати ті, які стосуються теми рівнянь та нерівностей.

ЗАВДАННЯ № 26 (СЕСІЯ 1):

Скільки існує різних дробів $\frac{m}{n}$, якщо m набуває значень 1; 2 або 4, а n набуває значень 5; 7; 11; 13 або 17?

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Дане завдання – на комбінаторику. Це розділ математики, присвячений розв'язанню задач на вибір та розташування елементів деякої, зазвичай скінченної, множини. Розв'язуючи подібні задачі, варто пам'ятати **правило добутку**: якщо об'єкт А можна вибрати m способами і при кожному виборі об'єкту А об'єкт В можна вибрати n способами, то вибір А і В можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Комбінаторними є такі задачі: «Скількома способами можна скласти розклад на день з п'яти різних предметів, якщо в класі вивчається 10 предметів?», «Скільки чисел можна скласти з чотирьох різних цифр?».

Розглянемо типові приклади таких задач:

а) Скільки трицифрових чисел можна скласти з 5, 3, 9, щоб цифри в них не повторювались?

б) Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри в них не повторювались?

Розв'язання:

а) На перше місце в новоутвореному числі можна поставити будь-яку з трьох цифр. Тобто можливих варіантів чисел – три. На друге місце можна поставити будь-яку іншу цифру з тих двох, що залишилися. Тобто можливих варіантів – два. Тоді на третє місце можна поставити тільки одну цифру. За правилом добутку отримаємо: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

б) Цю задачу розв'язуємо так само, як і попередню. Отримаємо: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

А тепер повернемося до нашого завдання:

Звісно, його можна розв'язати простим перебором варіантів або ж зрозуміти, що з чисельником $m=1$ утвориться 5 дробів (так само як і з чисельниками $m=2$ та $m=4$), отже всього отримаємо – 15 можливих дробів (до трьох варіантів чисельників можна підібрати п'ять варіантів знаменників, тому за правилом добутку – $3 \cdot 5 = 15$). Але в таких завданнях необхідно звертати увагу, чи будуть повторюватися дроби. У нашому завданні однозначна відповідь, що ні, бо запропоновані варіанти чисельника і знаменника є взаємно простими числами (взаємно прості числа – це ті натуральні або цілі числа, які не мають спільних дільників, більших за 1. Наприклад, 2 і 3 – взаємно прості, а 2 і 4 – ні, бо, окрім одиниці, ще діляться на 2).

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 15

ЗАВДАННЯ № 26 (СЕСІЯ 2):

Скільки всього різних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 5, 7 і 8 так, щоб у кожному числі всі цифри не повторювалися?

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

На перше місце можна поставити будь-яку цифру з цих чотирьох, тобто можливих варіантів чисел – 4. Залишилося три цифри, тому на друге місце можна поставити одну з них. Тобто можливих варіантів – 3. За правилом добутку отримаємо: $4 \cdot 3 = 12$.

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 12

ЗАВДАННЯ № 21 (СЕСІЯ 1):

До кожного виразу (1-4) при a>0 доберіть тотожно йому рівний (А-Д)

1	$\frac{2a^5}{a^6}$	А	$32a^{11}$
2	$(2a)^5 \cdot a^6$	Б	$2a^{\frac{5}{6}}$
3	$(2a^6)^5$	В	$2a^{\frac{6}{5}}$
4	$\sqrt[6]{64a^5}$	Г	$2a^{-1}$
		Д	$32a^{30}$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Для того, щоб розв'язати це завдання, пригадаємо властивості степенів з раціональним показником на області їх існування:

1) $a^n a^m = a^{n+m}$;
2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
3) $(ab)^n = a^n b^n$;
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;
5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
6) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
7) $a^1 = a$;
8) $a^0 = 1$;
9) $1^n = 1$;
10) $0^n = 0,\ n > 0$

Також нам стане у пригоді визначення арифметичного кореня n-го степеня: Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in N$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Позначається: $\sqrt[n]{a}$ та $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Тепер повернемося до нашого завдання:

№	Завдання	Відповідь
1	$\frac{2a^5}{a^6} = 2a^{5-6} = 2a^{-1}$	Г
2	$(2a)^5 \cdot a^6 = 2^5a^5 \cdot a^6 = 32a^{5+6} = 32a^{11}$	А
3	$(2a^6)^5 = 2^5a^{6 \cdot 5} = 32a^{30}$	Д
4	$\sqrt[6]{64a^5} = (64a^5)^{1/6} = 2^{6 \cdot 1/6} a^{5 \cdot 1/6} = 2a^{5/6}$	Б

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 1-Г, 2-А, 3-Д, 4-Б

ЗАВДАННЯ № 21 (СЕСІЯ 2):

До кожного виразу (1-4) доберіть тотожно йому рівний (А-Д).

1	$(a-8)(a+8)$	А	$a^2-16a+64$
2	$(a-8)^2$	Б	a^2-64
3	$(a-4)(a^2+4a+16)$	В	$a^2-20a+64$
4	$(a-4)(a-16)$	Г	a^3+64
		Д	a^3-64

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Для розв'язання завдання необхідно згадати основні формули скороченого множення:

1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;
3) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
4) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
5) $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$;
6) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$;
7) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$.

Тепер повернемося до нашого завдання:

№	Завдання	Використана формула при розв'язанні	Відповідь
1	$(a-8)(a+8) = a^2 - 64$	за формулою 5)	Б
2	$(a-8)^2 = a^2 - 16a + 64$	за формулою 2)	А
3	$(a-4)(a^2+4a+16) = a^3 - 64$	за формулою 6)	Д
4	$(a-4)(a-16) = a^2-20a+64$	Помножили двочлен на двочлен	В

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 1-Б, 2-А, 3-Д, 4-В

ЗАВДАННЯ № 28 (СЕСІЯ 1):

Обчисліть значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Розв'язання даного завдання вимагає повторення основних властивостей логарифмів. Отже, для $a>0$, $a \neq 1$, $x>0$ та $y>0$, маємо:

1) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$;
2) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$;
3) $a^{\log_a x} = x$ (основна логарифмічна тотожність);
4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ та $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (формули переходу до нової основи);
5) $\log_{a^p} b^q = \frac{q}{p} \log_a b$.

Повертаючись до нашого завдання, отримаємо:

$$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a \frac{500}{4} = \log_a 125 = \log_a 5^3 =$$
$$= 3 \cdot \log_a 5 = 3 \cdot \frac{1}{\log_5 a} = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 3 \cdot 4 = 12.$$

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 12

ЗАВДАННЯ №29 (СЕСІЯ 2):

Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20}16}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20}16} = \sqrt{20}^{\,2+\log_{\sqrt{20}^2}16} = \sqrt{20}^{\,2+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{20}}16} =$$
$$= 20 \cdot \sqrt{20}^{\,\log_{\sqrt{20}}16^{\frac{1}{2}}} = 20 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 20 \cdot 4 = 80.$$

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 80

ЗАВДАННЯ №27 (СЕСІЯ 1):

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x+8}{2y-5} = 2. \end{cases}$ Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0;y_0)$ є розв'язком цієї системи рівнянь.

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Найбільш вживаним методом розв'язання систем рівнянь є ***метод підстановки***. Для його реалізації з першого рівняння виразимо x: $x = y - 9$. Тепер підставимо цей вираз у друге рівняння. Отримаємо:

$$\frac{y-9+8}{2y-5} = \frac{2}{1}, \text{ тобто } \frac{y-1}{2y-5} = \frac{2}{1}.$$

Останнє рівняння записане у вигляді пропорції, тому можемо скористатися основним правилом пропорції для його спрощення (добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх): $(y-1) \cdot 1 = (2y-5) \cdot 2$;

Далі: $y - 1 = 4y - 10$, $3y = 9$, а $y = 3$.

Повертаємося до підстановки і знаходимо x: $x = 3 - 9 = -6$.

Маємо розв'язок: $x_0 = -6$, $y_0 = 3$.

У відповідь необхідно записати добуток, тому $x_0 \cdot y_0 = (-6) \cdot 3 = -18$.

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: –18

У ВИПУСКУ СПЕЦПРОЕКТУ ВІД 18.12 В ОДНОМУ ІЗ ЗАВДАНЬ БУЛА ДОПУЩЕНА ПОМИЛКА. ПУБЛІКУЄМО ПРАВИЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Завдання № 18 (сесія 2): Запишіть числа 2^{15}, 4^{10}, 10^5 у порядку зростання.

А	Б	В	Г	Д
$2^{15}, 4^{10}, 10^5$	$2^{15}, 10^5, 4^{10}$	$10^5, 2^{15}, 4^{10}$	$10^5, 4^{10}, 2^{15}$	$4^{10}, 2^{15}, 10^5$

Розв'язання: Спершу необхідно згадати, що означає записати числа в порядку зростання: порядок зростання — це від найменшого до найбільшого. Тому необхідно порівняти числа $a=2^{15}$, $в=4^{10}$, $c=10^5$.
За властивостями степенів кожне з чисел можна представити у вигляді п'ятого степеня деякого числа: $a=2^{15}=(2^3)^5=8^5$, $в=4^{10}=(4^2)^5=16^5$, $c=10^5$.
Бачимо, що $a=8^5$, $в=16^5$, $c=10^5$.
Тому порядок зростання відповідає такому розташуванню: $a<c<в$.

ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: Б