

Сьогодні ми розберемо частину завдань, які стосуються планіметрії та стереометрії, а також деякі прикладні завдання

### ЗАВДАННЯ №6 (СЕСІЯ 2)

При якому значенні у вектори  $a(-3;5)$  і  $b(6;y)$  колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
-10	-2,5	2,5	3,6	10

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Два ненульових вектори називаються **колінеарними**, якщо їх напрями співпадають або протилежні. Колінеарні вектори розміщені завжди на паралельних прямих або на одній прямій. Якщо вектори задано координатами, то колінеарність перевіряють пропорційністю їх координат. Тобто, щоб вектори були колінеарні, як зазначено у завданні, їх координати повинні бути пропорційні:

$$\frac{-3}{6} = \frac{5}{y}, \quad -3y=30, y=-10$$

**ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: А.**

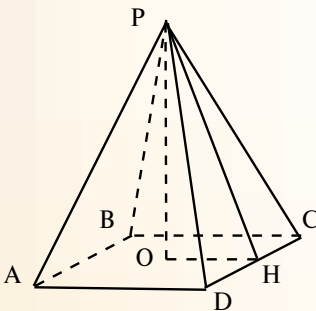
### ЗАВДАННЯ №15 (СЕСІЯ 1)

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема — 5 см. Визначте косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Піраміда називається **правильною**, якщо її основа є правильний багатокутник, а його центр збігається з основою висоти піраміди. Всі бічні грані правильної піраміди є рівні рівнобедрені трикутники. Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають апофемою правильної піраміди. На рис. зображено правильну піраміду, а РН — апофема.



$PO \perp$  площині ABCD і тому  $PO \perp OH$ ,  $PH \perp DC$  і, спираючись на теорему про три перпендикуляри, можемо зробити висновок, що  $OH \perp DC$ . Кут РНО — лінійний кут двогранного кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи. За даними нашої задачі,  $PO=4$  см і  $PH=5$  см. Тому  $OH=3$  см (довжину знайшли за теоремою Піфагора). За означенням косинуса, отримуємо

$$\cos \angle PNO = \frac{OH}{PH} = \frac{3}{5}$$

**ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: Б.**

### ЗАВДАННЯ №16 (СЕСІЯ 2)

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а бічне ребро — 5 см. Визначте косинус кута між бічним ребром і площиною основи.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Використаємо для розв'язання задачі рисунок з попереднього завдання:  $PO \perp$  площині ABCD і тому  $PO \perp OC$ , тобто трикутник РОС — прямокутний. За даними задачі,  $PO=3$  см, і  $PC=5$  см. Тому  $OC=4$  см (за теоремою Піфагора). Кут між бічним ребром та площиною основи — це кут між бічним ребром та проекцією цього ребра на площину основи (в даному випадку  $OC$  — проекція). За означенням косинуса, отримуємо:

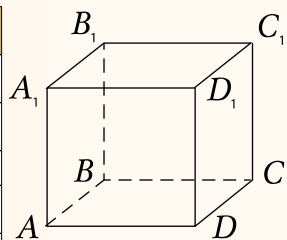
$$\cos \angle PCC = \frac{OC}{PC} = \frac{4}{5}$$

**ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: А.**

### ЗАВДАННЯ №24 (СЕСІЯ 1)

На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . До кожного початку речення (1—4) доберіть його закінчення (А—Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	Закінчення речення
1 Пряма СВ	А Паралельна площині $AA_1 B_1 B$ .
2 Пряма $CD_1$	Б Перпендикулярна площині $AA_1 B_1 B$ .
3 Пряма АС	В Належить площині $AA_1 B_1 B$ .
4 Пряма $A_1 B$	Г Має з площиною $AA_1 B_1 B$ лише дві спільні точки.
	Д Утворює з площиною $AA_1 B_1 B$ кут $45^\circ$ .



#### РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Для розв'язання необхідно знати аксіоми стереометрії, особливо  $C_3$ :

$C_1$ . В просторі існують площина й точка, що не лежить у цій площині.

$C_2$ . Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести одну й тільки одну площину.

$C_3$ . Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то й уся пряма лежить у цій площині.

$C_4$ . Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

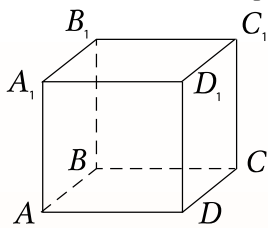
Повертаємося до нашого завдання:

	Початок речення	Закінчення речення	Пояснення
1	Пряма СВ	Б Перпендикулярна площині $AA_1 B_1 B$ .	Ребра куба перпендикулярні граням, до яких вони не належать, але мають з ними спільну точку
2	Пряма $CD_1$	А Паралельна площині $AA_1 B_1 B$ .	Пряма та площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма $a$ паралельна площині, $\alpha$ то пишуть $a \parallel \alpha$ . Площини $AA_1 B_1 B$ і $DCC_1 D_1$ паралельні, а $CD_1$ належить площині $DCC_1 D_1$ .
3	Пряма АС	Д Утворює з площиною $AA_1 B_1 B$ кут $45^\circ$ .	Кут між АС та площиною $AA_1 B_1 B$ — це кут між АС та її проекцією на дану площину. Оскільки $BC \perp AB$ , то АВ — проекція. Тобто шуканий кут — кут САВ, а у квадрата кут між діагоналлю та стороною $45^\circ$ .
4	Пряма $A_1 B$	В Належить площині $AA_1 B_1 B$ .	За аксіомою $C_3$ : Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то й уся пряма лежить у цій площині.
		Г Має з площиною $AA_1 B_1 B$ лише дві спільні точки.	За аксіомою $C_3$ таке положення неможливе

**ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 1-Б, 2-А, 3-Д, 4-В.**

### ЗАВДАННЯ №23 (СЕСІЯ 2)

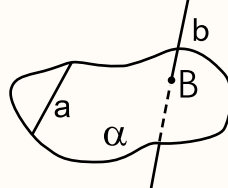
На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між парою прямих та їхнім взаємним розміщенням.



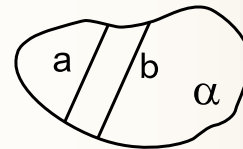
Пара прямих	Взаємне розміщення
1 АС і $CC_1$	А Прямі паралельні.
2 $AB_1$ і $CD_1$	Б Прямі мимобіжні.
3 АС і $CD_1$	В Прямі перетинаються і утворюють прямий кут.
4 $AB_1$ і $C_1 D$	Г Прямі перетинаються і утворюють кут $45^\circ$ .
	Д Прямі перетинаються і утворюють кут $60^\circ$ .

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Нагадаємо теоретичну інформацію про розташування прямих у просторі. Якщо дві прямі лежать у одній площині, то вони або перетинаються, або паралельні. В стереометрії можливі і третій випадок — коли дві прямі не лежать у одній площині. Такі прямі називають мимобіжними. Ознака мимобіжних прямих: якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні (див. рис.).



Дві прямі називаються паралельними, якщо вони лежать у одній площині й не перетинаються (рис.).



Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути. Кутова міра не найбільшого з них називається кутом між двома прямими, що перетинаються. Величина кута між прямими, що перетинаються, не перевищує  $90^\circ$ . Якщо дві прямі паралельні або співпадають, то кут між ними дорівнює  $0^\circ$ . Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим. Його величина також не перевищує  $90^\circ$ . Повернемося до нашого завдання:

Пара прямих	Взаємне розміщення	Пояснення
1 АС і $CC_1$	В Прямі перетинаються і утворюють прямий кут.	Бічні ребра куба перпендикулярні до площин основ, тому до будь-якої прямої в цих площинах, в нашому випадку — до АС
2 $AB_1$ і $CD_1$	Б Прямі мимобіжні.	Прямі лежать в різних площинах, тому, за означенням, мимобіжні
3 АС і $CD_1$	Д Прямі перетинаються і утворюють кут $60^\circ$ .	Уявимо переріз куба, що проходить через точки А, С, $D_1$ . Це буде рівносторонній трикутник, бо кожна пара точок утворює відрізок, що є діагоналлю грані. Кожна грань куба — квадрат, тому їх діагоналі однакові. У рівносторонньому трикутнику кут між сторонами $60^\circ$
4 $AB_1$ і $C_1 D$	А Прямі паралельні.	Лежать в паралельних площинах та визначають площину $AB_1 C_1 D$
	Г Прямі перетинаються і утворюють кут $45^\circ$ .	

**ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: 1-В, 2-Б, 3-Д, 4-А.**

### ЗАВДАННЯ №3 (СЕСІЯ 1)

На діаграмі відображено кількість відвідувачів Музею Води протягом одного робочого тижня (з вівторка до неділі). У який день тижня кількість відвідувачів була вдвічі більшою, ніж у попередній день?

А	Б	В	Г	Д
середа	четвер	п'ятниця	субота	неділя

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ:

Для того, щоб дати відповідь на питання завдання, необхідно визначити за діаграмою кількість відвідувачів кожного дня. Для цього потрібно визначити ціну поділки на осі, яка вказує кількість відвідувачів:  $100:5=20$ . Отримуємо, що у вівторок — 60 відвідувачів, середу — 100, четвер — 180, п'ятницю — 360, суботу — 600, неділю — 700. Бачимо, що у п'ятницю кількість відвідувачів вдвічі більша, ніж у четвер:  $360:180=2$ .

**ПРАВИЛЬНА ВІДПОВІДЬ: В.**

